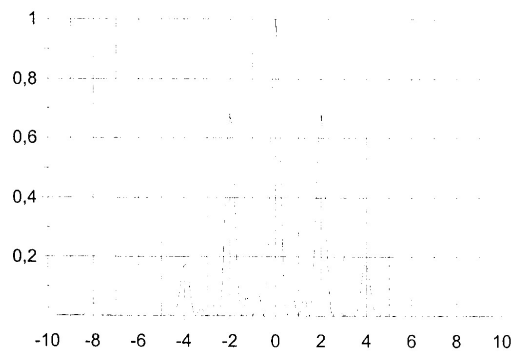
Tentamen Golven & Optica 29 januari 2010 08u30 – 11u30

S.v.p. elke opgave op een apart vel i.v.m. nakijken door verschillende personen!
Vermeld op elk vel je naam en studentnummer.
Dit tentamen bestaat uit 4 opgaven.
Cijfer = $\sum punten/3+1$

Opgave 1. Interferentie

Op een scherm wordt een Fraunhofer-diffractiepatroon gemaakt door een bundel licht te laten vallen op plaatje met een aantal evenwijdige spleten, met spleetbreedte $b = 0{,}1\ mm$ en een vaste onderlinge afstand a. De afstand van het plaatje tot het scherm is 1,00 m.
In de figuur is de intensiteit op het scherm gegeven als functie van de positie in mm.



a. Geef het aantal spleten waarmee het diffractiepatroon is gemaakt en geef aan waar je dat uit afleidt.
b. Bereken de onderlinge afstand a van de spleten en geef aan hoe je aan je antwoord komt.
c. Bereken de golflengte van het gebruikte licht.

Opgave 2. De trans-Atlantische telefoonkabel

Toen in 1858 de eerste trans-Atlantische kabel gelegd werd, maakte de fysicus William Thomson (de latere Lord Kelvin) daar een model van. Hij kwam tot de conclusie dat een spanningsgolf $V(x,t)$ door deze kabel zou moeten voldoen aan de vergelijking:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = RC\frac{\partial V}{\partial t}$$

waarin R en C resp. de weerstand per meter en de capaciteit per meter zijn.

a. Bereken voor welke voorwaarde voor k de golf $V(x,t) = A\cdot e^{-\gamma x}e^{i(\omega t-kx)}$ voldoet aan deze vergelijking.

Op grond van zijn model concludeerde Thomson dat de trans-Atlantische kabel ongeschikt zou zijn voor telefonie. Daarvoor had hij een aantal redenen.

b. Noem twee redenen die Thomson hiervoor gehad zou kunnen hebben.

Een tijdgenoot van Thomson, Oliver Heaviside, liet echter zien dat Thomson in zijn model een ongeoorloofde benadering had gemaakt en vond een betere vergelijking:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = RC\frac{\partial V}{\partial t} + LC\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$$

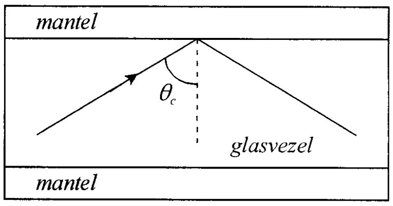
Hierin is L de coëfficiënt van zelfinductie per meter. Ook aan deze vergelijking voldoet een golf van de vorm $V(x,t) = A \cdot e^{-\gamma x} e^{i(\omega t - kx)}$

c. Geef, met behulp van de Heaviside-vergelijking, de voorwaarden (in termen van de grootheden R, L, C en ω) waaronder de trans-Atlantische kabel wel degelijk geschikt kan zijn voor telefonie, dat wil zeggen dat ongedempte golven van de vorm $V(x,t) = A \cdot e^{i(\omega t - kx)}$ kunnen voorkomen.

Opgave 3. Glasvezels

Fresnel reflectie-coëfficiënten
$R_{evenwijdig} = \dfrac{\tan(\phi_t - \theta_i)}{\tan(\phi_t + \theta_i)}$ en $R_{loodrecht} = \dfrac{\sin(\phi_t - \theta_i)}{\sin(\phi_t + \theta_i)}$

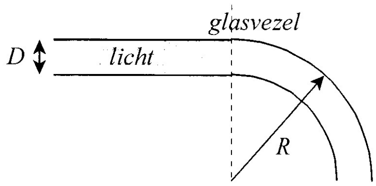
Een glasvezel is gemaakt van glas met een brekingsindex $n = 1{,}5$ en heeft een diameter D. De glasvezel is omhuld door een mantel met een brekingsindex $n_0 = 1{,}2$. Door de glasvezel wordt licht gestuurd met een golflengte $\lambda = 500\ nm$ (in de vezel) en een frequentie $f = 4{,}0 \cdot 10^{14}\ Hz$.



a. Laat aan de hand van de reflectie-coëfficiënten van Fresnel zien dat totale interne reflectie optreedt als de brekingshoek $\phi_t = \pi / 2$.

b. Bereken voor de glasvezel de hoek $\theta_i = \theta_c$ waarbij totale interne reflectie plaatsvindt van het licht binnen de glasvezel.

Het licht wordt evenwijdig aan de as van de glasvezel ingestraald. Op een bepaalde plaats wordt de glasvezel in een bocht gelegd met straal R.



c. Bereken de minimale waarde van de verhouding R / D waarbij er nog net geen licht uit de vezel lekt.

Voor een golf met golfgetal $\vec{k} = \vec{k}_1 + \vec{k}_2$, waarbij $\vec{k}_1$ de component evenwijzig aan de as van de glasvezel is en $\vec{k}_2$ de component loodrecht daarop, geldt dat bij totale interne reflectie $D \cdot k_2$ voldoet aan een bepaalde randvoorwaarde.

d. Geef de randvoorwaarde waaraan $D \cdot k_2$ moet voldoen.

e. Bereken de fasesnelheid van het licht aan de hand van de gegevens.

f. Bereken de maximale waarde van de groepssnelheid van de golven als de diameter D van de glasvezel zo gekozen wordt dat $D < \lambda < 2D$.

Opgave 4. De halfdoorlatende spiegel

In sommige verhoorkamers wordt een raam aangebracht waarachter toeschouwers in de kamer kunnen kijken zonder dat ze zelf gezien worden. Vanuit de kamer lijkt het dan alsof het raam een spiegel is. Zo'n raam kan gemaakt worden door een aantal glasplaten achter elkaar te plaatsen.
Als een lichtbundel vanuit lucht een glasplaat binnentreedt, wordt een fractie r van de intensiteit van de bundel gereflecteerd terwijl een fractie $t = 1 - r$ in het glas gaat. Beide fracties hangen af van de brekingsindices van lucht en glas: resp. n_L en n_G.

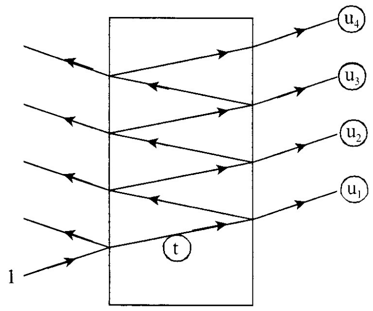
a. Welke van de volgende vier uitdrukkingen is juist en beargumenteer waarom.

A. $r = \dfrac{n_G - n_L}{n_G + n_L}$ B. $r = \left(\dfrac{n_G - n_L}{n_G + n_L}\right)^2$ C. $r = \dfrac{n_G + n_L}{n_G - n_L}$ D. $r = \left(\dfrac{n_G + n_L}{n_G - n_L}\right)^2$

b. Gegeven is dat $n_L = 1$ en $n_G = 1{,}5$. Bereken de fractie r als het licht op een glazen ruit valt die oneindig dik is.

c. We beschouwen nu een ruit met een eindige dikte. Daarbij wordt het licht zowel aan de voorzijde als aan de achterzijde gereflecteerd en doorgelaten.
Geef een argument waarom de fractie die van lucht naar glas wordt doorgelaten evengroot is als de fractie die van glas naar lucht wordt doorgelaten.

d. Bereken de fractie u_1 van het licht dat precies twee keer gebroken wordt (zie tekening) uitgedrukt in t en geef ook de getalswaarde.



e. Geef de fracties u_j met $j = 2, 3, \ldots.$, uitgedrukt in t en bereken de som $T(1) = \sum_{j=1}^{\infty} u_j$ van de totale fractie doorgelaten licht. (Hint: $\sum_{j=0}^{\infty} a^j = \dfrac{1}{1-a}$)

f. Als men op korte afstand van elkaar verschillende ruiten achter elkaar plaatst, kan men laten zien dat de totale fractie doorgelaten licht met elke extra ruit een fractie $\dfrac{1}{(1+r)^2}$ kleiner wordt.

Dus $T(N) = \dfrac{T(1)}{(1+r)^{2(N-1)}}$, waarbij N het aantal ruiten is.

Bereken het minimum aantal ruiten dat nodig is om er voor te zorgen dat de totale fractie teruggekaatst licht R groter is dan de totale fractie doorgelaten licht T.

Puntenverdeling

	1a. 1	2a. 2	3a. 1	4a. 1
	b. 1	b. 1	b. 1	b. 1
	c. 3	c. 3	c. 1	c. 1
			d. 1	d. 1
			e. 1	e. 2
			f. 3	f. 2
totaal:	5	6	8	8

Uitwerkingen

1a. 4; het aantal nevenmaxima is 2

b. $\frac{a}{b} = 3$ want het 3e hoofdmaximum valt samen met het 1e minimum van de buiging. Met $b = 0{,}1\ mm$ volgt $a = 0{,}3\ mm$

c. Het 4e hoofdmaximum ligt op 8 mm. Dan is $\alpha = k\frac{a}{2}\sin(\theta) = 4 \cdot \pi$ en $\tan(\theta) = \frac{8}{1000}$. Met $a = 0{,}3\ mm$ volgt $k = 10472\ mm^{-1}$ zodat $\lambda = 6{,}00.10^{-4}\ mm = 600\ nm$

2a. Invullen levert: $Ae^{-\gamma x}e^{i(\omega t - kx)}\left[\left(k^2 - \gamma^2\right) + i\left(2k\gamma - \omega RC\right)\right] = 0$

daaruit volgt: $\gamma = \pm k$ en $\omega RC = 2k\gamma = 2k^2$ zodat $k = \sqrt{\frac{\omega RC}{2}}$

b. Problemen kunnen ontstaan door:
1. demping; gevolg van de factor $e^{-\gamma x}$
2. door dispersie ($v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{2k}{RC}$ is afhankelijk van k), waardoor signalen van verschillende frequentie een verschillende voortplantingssnelheid hebben en het signaal over enige afstand volstrekt onverstaanbaar wordt.

c. Als golven van de vorm $V(x,t) = A \cdot e^{i(\omega t - kx)}$ voldoen dan volgt: $-k^2 = -i\omega RC - \omega^2 LC$

Dit kan alleen als de imaginaire term verwaarloosbaar is: $LC\omega^2 > RC\omega$ zodat $\frac{R}{L} < \omega$

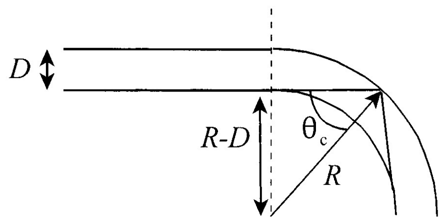
Dan volgt: $k = \omega\sqrt{LC}$ zodat $v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ onafhankelijk van k is en er dus ook geen dispersie meer is.

3a. Voor $\phi_t = \pi/2$ geldt: $\sin(\phi_t \pm \theta_t) = \cos(\theta_t)$ en $\cos(\phi_t \pm \theta_t) = \mp\sin(\theta_t)$ zodat beide reflectie-coëfficiënten = -1 worden.

b. als $\phi_t = \pi/2$ dan is $\sin(\theta_c) = \frac{n_0}{n} = \frac{1{,}2}{1{,}5} = 0{,}8 \ \rightarrow\ \theta_c = 53{,}1^o$

c. $\sin(\theta_c) = \frac{R-D}{R} = 1 - \frac{D}{R}$

daaruit volgt: $\frac{R}{D} = \frac{1}{1-\sin(\theta_c)} = 5$



d. $D \cdot k_2 = N \cdot \pi$

e. $v_f = \lambda \cdot f = 2{,}0 \cdot 10^8\ m/s \qquad v_f = \frac{\omega}{k_1} =$

f. $\omega = v_f \cdot k = v_f \cdot \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk_1} = v_f \cdot \frac{k_1}{k} = v_f \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{k_2}{k}\right)^2} = v_f \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{N\pi}{Dk}\right)^2} = v_f \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{N\lambda}{2D}\right)^2}$$

Voor de gegeven waarden van de diameter D geldt: $N = 1$.

De maximale waarde van v_g wordt verkregen als $\frac{\lambda}{D} = 1$, dan volgt:

$$v_g = v_f\sqrt{1-\frac{1}{4}} = 0{,}866\cdot v_f = 1.7\cdot 10^{`}\ m\ \ s$$

4a. B; als $n_L = n_G$ moet $r = 0$ en tevens geldt $r \geq 0$

b. $r = 0{,}04$

c. De uitdrukking voor r is invariant onder $n_L \leftrightarrow n_G$ en dat geldt dan ook voor t

d. $u_1 = t^2 = (1-0{,}04)^2 = 0{,}92$

e. $u_j = t^2 r^{2j-2}$; $T(1) = \sum_{j=1}^{\infty} u_j = \frac{t^2}{1-r^2} = \frac{t}{1+r}$

f. $T(N) = \frac{T(1)}{(1+r)^{2(N-1)}} = \frac{t}{(1+r)^{2N-1}} < R = 1 - T(N)$ zodat $\frac{t}{(1+r)^{2N-1}} < \frac{1}{2}$ hieruit volgt: $N \geq 9$.